TITLE:

Malcev completion of Galois groups and mixed Tate modules

AUTHOR(S):

松本, 眞

CITATION:

松本, 眞. Malcev completion of Galois groups and mixed Tate modules. 代数幾何学シンポジューム記録 2000, 2000: 127-137

ISSUE DATE:

2000

URL:

http://hdl.handle.net/2433/214722

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

MALCEV COMPLETION OF GALOIS GROUPS AND MIXED TATE MODULES

松本 眞

(Duke 大 R.Hain との共同研究)

1. 動機

F を数体、$G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ をその絶対ガロア群とします。この原稿で考える問題は、「G_F の線形表現で『幾何から来るもの』全体はどんなカテゴリーをなすか」です。

「幾何から来るもの」とは何か、の明白な定義はありません。が、幾何から来る表現の例を二つあげます。X/F を幾何的連結な F 上の代数多様体とし、その係数拡大を $\overline{X} := X \otimes \overline{F}$ であらわします。するとエタールコホモロジー $H^i_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ は G_F の作用する $\mathbb{Q}_\ell$ 線型空間になります。これが幾何から来る表現の代表例です。

また、X に F-有理点があったとしてその一つを x とすると、pro-ℓ 代数的基本群 $\Pi := \pi_1^{(\ell)}(\overline{X}, \bar{x})$ に G_F が作用します。Π は一般には非可換群ですが、「マルセフ完備化の Lie 環」(Appendix 参照) を使って線形化でき、G_F の作用する $\mathbb{Q}_\ell$ 線型空間をつくることができます。これも幾何から来るガロア表現の例です。

一つ一つのガロア表現を研究することも大切ですが、それらの全体の構造、いいかえると「幾何的対象から来る線形ガロア表現の全体はどんなカテゴリーか」というのが基本的な問です。おおまかに分けて 1.G_F 線形表現のうちどんなものが幾何から来るかの群論的特徴づけ、2. そのカテゴリーの構造の決定、の二つのステップがあります。「幾何から来た表現」の定義がない以上、1. についてはある程度恣意性があります。

ここでは少しカテゴリーを制限して、「mixed Tate module」全体のカテゴリーを考えると、その構造を決定できる（淡中圏の意味での基本群が求まる）ことを説明します。

Date: January 9, 2001.
この研究は文部省科研費によってサポートされています。この研究の一部は著者の Duke 大及び MSRI 滞在中になされました。関係諸機関に感謝します。この原稿は 2000 年代数学シンポジウム講究録の松本原稿「ガロア群の代数群による完備化と基本群への作用」と大きく重複するのをご了承ください。.

これを用いて、Deligne が述べたと言われる、「射影直線引く 3 点の pro-ℓ 基本群へのガロア群の作用に関する予想」(formulation は伊原 [5]) のうちの「生成」部分を証明することができます。

2. 淡中圏と淡中基本群

k を体とします。以下では、k 上の代数群 G とは行列群の代数的部分群のことを言うことにします。$\mathcal{V}ec_k$ で k 上の有限次元ベクトル空間のカテゴリーをあらわします。

Definition 2.1. k 上の pro 代数群 $\mathcal{G}$ とは、代数群の全射による projective system $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のこと。正確には代数群のカテゴリーの pro-object で、

$$\mathcal{G} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \lambda\in\Lambda}} G_\lambda$$

と見なせる。

同様に prounipotent 群とは、unipotent 群 (すなわち対角成分が 1 である上三角行列群の代数的部分群) の全射による projective system のこと。

pro 代数群 $\mathcal{G}$ の線形表現とは、有限次元 k 線型空間であってある G_λ の代数的作用が定まっているもの。$\mathcal{G} \to G_\lambda$ を経由して $\mathcal{G}$ 作用とみなす。$\mathcal{G}$ の k-線形表現全体のカテゴリーを $\mathcal{R}ep(\mathcal{G})$ で表す。

上で、G_λ, G_μ の表現が与えられた時、射影系ですから $G_\nu \to G_\lambda$, $G_\nu \to G_\mu$ がありますので、G_ν に引き戻して同じなら二つの表現を同じと思います。言い換えると、

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, GL(V)) := \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(G_\lambda, GL(V))$$

の元が $\mathcal{G}$ の表現です。

Definition 2.2. 体 k 上の (fiber functor を持つ neutral な) 淡中圏 $\mathcal{M}$ とは、ある k 上の pro 代数群 $\mathcal{G}$ の k-線形表現全体のカテゴリー $\mathcal{R}ep(\mathcal{G})$ と同値なカテゴリーのこと。$\mathcal{G}$ を、$\mathcal{M}$ の淡中基本群という。

Remark 2.3. 実際には、上の定義は本当は定理であるべきものです。ちゃんとした定義は以下のような感じで公理的に与えられます。淡中圏 $\mathcal{M}$ とは k 上のアーベル圏で、tensor functor と呼ばれる $\otimes : \mathcal{M}\otimes\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が与えられ、tensor functor を保つ fiber functor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{V}ec_k$ が与えられ、いくつかの公理を満たすもの。

この時、functor F の tensor を保つ自己同形群 $\mathrm{Aut}^{\otimes} F$ には自然に pro 代数群の構造が入ります ($K \mapsto \mathrm{Aut}^{\otimes}(F \otimes_k K)$ を represent する pro 代数群)。この pro 代数群を「F を基点とする $\mathcal{M}$ の淡中基本群」といい、

$$\pi_1(\mathcal{M}, F) := \mathrm{Aut}^{\otimes} F$$

で表します。

定理は、$\mathcal{M} \simeq \pi_1(\mathcal{M}, F)$ − module の圏, $M \in \mathcal{M} \mapsto F(M)$ なる tensor を保つカテゴリー同値があることです。

このようなものを「基本群」と呼びたい気持ちですが、典型的な例として $k = \mathbb{R}$、X を実可微分多様体、$\mathcal{M}_X$ を flat connection の入った X 上の有限次元ベクトルバンドル全体、x を X 上の一点とし、$F_x : \mathcal{M}_X \to \mathcal{V}ec_k$ を x 上のファイバーをとる functor とすると、淡中圏になります。$M \in \mathcal{M}_X$ に対して flat section をつなげることでモノドロミー写像 $\pi_1(X, x) \to \operatorname{Aut} F_x(M)$ が得られ、M を動かすと

$$\pi_1(X, x) \to \operatorname{Aut} F_x = \pi_1(\mathcal{M}_X, F_x)(k)$$

が得られます。この写像の像は Zariski dense で、右辺の淡中基本群は $\pi_1(X, x)$ の代数的完備化と呼ばれます。この場合の $\mathcal{M}_X$ は $\pi_1(X, x)$ の有限次元 k 線形表現の全体です。

淡中圏の正確な定義は、例えば [1] を参照してください。

3. Mixed Tate modules

ℓ を有理素数、F を数体、S を有限素点の有限集合で ℓ 上の素点を全て含むもの、$\mathcal{O}_{F,S}$ を S-integer の環、$G_{F,S}$ を F の S の外で不分岐な最大代数拡大体の F 上のガロア群 (代数的基本群の言葉で言えば $G_{F,S} = \pi_1(\mathcal{O}_{F,S})$)、$\chi : G_{F,S} \to \mathbb{Z}_\ell^\times \subset \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ を ℓ-進 cyclotomic character とします。$G_{F,S}$ は F の絶対ガロア群 G_F の商群で、S の外の素点の惰性群全てで生成される正規部分群で割って得られます。

以下、G_F の線形表現 M といったら、G_F が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$-線型空間 M のことを言います。

$\mathbb{Q}_\ell(1)$ で $\sigma \in G_F$ が cyclotomic character χ により $\chi(\sigma)$ 倍として作用する 1 次元 $\mathbb{Q}_\ell$ 線型空間をあらわし、$\mathbb{Q}_\ell(m)$ で $\chi(\sigma)^m$ 倍として作用する 1 次元空間を表します ($m \in \mathbb{Z}$)。この一次元空間を weight $-2m$ の Tate module と呼びます。

Definition 3.1. G_F の線形表現 M が $\mathcal{O}_{F,S}$ 上不分岐な ℓ-進 mixed Tate module であるとは、

(i) G_F の作用は S の外で不分岐、すなわち $G_F \to G_{F,S}$ を経由する。

(ii) M には weight filtration と呼ばれる $G_{F,S}$-不変な上昇 filtration が入る。filtration は 0 から始まり M 自身で終わる:

$$0 = W_N M \subset W_{N+1} M \subset \cdots \subset W_{N'} M = M.$$

filtration の添え字は整数 (負でも良い)。

(iii) 不変性より、graded quotients $\operatorname{Gr}_m^W M := W_m M / W_{m-1} M$ ($m \in \mathbb{Z}$) は $G_{F,S}$-module となるが、奇数ウェイトは消滅し、偶数ウェイトはその重みの Tate module の直和。すなわち、ある整数 $r_m \geq 0$ によって $\operatorname{Gr}_{2m+1}^W M = 0$、$\operatorname{Gr}_{2m}^W M \cong \mathbb{Q}_\ell(-m)^{r_m}$.

$\mathcal{O}_{F,S}$ 上不分岐な ℓ-進 mixed Tate module のカテゴリー（射は G_F 加群としての射）を $\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ であらわす。

Remark 3.2. ガロア群 G_F の線形表現であって「幾何から来るもの」にはウエイトフィルトレーションと呼ばれるフィルトレーションが入ると考えられています。元の幾何が $\mathcal{O}_{F,S}$ 上スムースなものであるなら G_F の作用は $G_{F,S}$ を経由すると考えられます。これで、さらに各 graded quotients が Tate module であるという条件を課したものが mixed Tate modules です。

上の定義 3.1 では「幾何的」という条件をほとんど反映していません。が、この場合の特殊性により、これだけの条件で非幾何的な表現を排除していると思われます。例えば、加法的で非自明なキャラクター $a : G_{F,S} \to \mathbb{Z}_\ell$ をとり $\sigma \in G_{F,S} \to \begin{pmatrix} 1 & a(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により $\mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell$ を $G_{F,S}$-加群にしたとします。このような表現には定義 3.1 を満たすような filtration を入れることができません。

Example 3.3. (i) Tate module $M = \mathbb{Q}_\ell(m)$ は $M = W_{-2m}M \supset W_{-2m-1}M = 0$ により、$\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の対象となる。

(ii) 代数多様体の基本群。X を F 上の幾何的連結代数多様体、$x \in X(F)$ を有理点とすると、pro-ℓ 代数的基本群 $\Pi := \pi_1^{(\ell)}(\overline{X}, \bar{x})$ には G_F が作用する。

$\mathcal{P}$ を Π の $\mathbb{Q}_\ell$-係数連続マルセフ完備化（Appendix、および [3] 参照）とし、$\mathfrak{p}$ をその Lie 環とすると、$\mathfrak{p}$ には weight filtration が入り、$\mathfrak{p}/W_N\mathfrak{p}$ は有限次元 G_F-module となる。X が $\mathcal{O}_{F,S}$ 上スムース、$x \in X(\mathcal{O}_{F,S})$（$X$ が proper でないときは、コンパクト化における complement divisor と x を合わせて $\mathcal{O}_{F,S}$ 上 etale, を仮定する）とすると、この作用は $G_{F,S}$ を経由する。

一般には $\mathfrak{p}/W_N\mathfrak{p}$ は mixed Tate module にはならないが、$H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ が $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ の直和の場合は mixed Tate module となる。例えば、$F = \mathbb{Q}$, $S = \{\ell\}$, $X := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}/\mathbb{Q}$ の時は (base point として $\vec{01}$ をとると) 上の条件が満たされ、$\mathfrak{p}$ の weight filtration は本質的に lower central series に一致する。正確に述べると、lower central series を $L^1\mathfrak{p} := \mathfrak{p}$, $L^{m+1}\mathfrak{p} := [L^m\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ で帰納的に定義すると、$W_{-2m+1}\mathfrak{p} = W_{-2m}\mathfrak{p} = L^m\mathfrak{p}$ であり、

$$\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p} := \bigoplus_{m=-1}^{-\infty} \mathrm{Gr}^W_m\,\mathfrak{p}$$

は 2 元生成自由 $\mathbb{Q}_\ell$Lie 環となり、また各 graded quotient はその重みの Tate module の直和となる。すなわち $\mathfrak{p}/W_{-n}\mathfrak{p} \in \mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$.

4. ガロア群の PRO-代数群による完備化

$\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ はガロア群 $G_{F,S}$ のある種の表現のカテゴリーですが、実は淡中圏になります。すなわちある pro-代数群 $\mathcal{A}_{F,S}$ の表現全体のカテゴリーになります。次の考察により、$\mathcal{A}_{F,S}$ は $G_{F,S}$ の代数群によるある種の完備化というべき操作によって得られます。

$M \in \mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ とすると、準同形 $G_{F,S} \to \mathrm{Aut}_W M$ があります。ここに $\mathrm{Aut}_W M$ は weight を保つ自己同形、

$$\mathrm{Aut}_W M := \{f \in GL(M) | f(W_m M) \subset W_m M \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\}$$

です。すると短完全列

$$1 \to U \to \mathrm{Aut}_W M \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}^W_\bullet M) \to 1$$

が得られます。M の weight filtration に沿った基底をとると、U は対角成分が 1 の三角行列、すなわち unipotent 群になります。各 graded quotients $\mathrm{Gr}^W_m M$ に $a \in \mathbb{G}_m$ が a^m で作用することにより $\mathbb{G}_m \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}^W_\bullet M)$ を定義し、これにそって短完全列を引き戻すと

$$1 \to U \to \mathrm{Aut}_{W,\mathrm{Gr}} M \to \mathbb{G}_m \to 1$$

を得ます。セクション $\mathbb{G}_m \to \mathrm{Aut}_{W,\mathrm{Gr}} M$ を決めると共役により $\mathbb{G}_m$ が U に作用します。先にとった基底がこの作用の固有ベクトルになるようセクションを決めると、$\mathbb{G}_m$ は U の各ブロックに χ^m $(m > 0)$ で作用することがわかり、特に $U/[U, U]$ への作用 (これはセクションによらない) にもおなじことが言えます。

M が ℓ-進 mixed Tate module であることから、$G_{F,S}$ の像は $\mathrm{Aut}_{W,\mathrm{Gr}} M$ の $\mathbb{Q}_\ell$-有理点の群に入ることがわかります。この像の Zariski 閉包を G_M とすると、

$$1 \to U_M \to G_M \to \mathbb{G}_m \to 1$$

なる短完全列を得ます。

さて、逆に短完全列

$$1 \to U_\lambda \to G_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} \mathbb{G}_m \to 1 \tag{1}$$

と連続群準同型

$$\rho_\lambda : G_{F,S} \to G_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$$

が与えられ、条件

(i) ρ_λ は Zariski dense
(ii) $p_\lambda \circ \rho_\lambda = \chi$,
(iii) U_λ は unipotent,
(iv) abel 化 U_λ^{ab} への $\mathbb{G}_m$ 作用は χ^m $(m > 0)$ の直和

が満たされるとき、G_λ-module は ℓ-進 mixed Tate module となることが比較的容易に示せます。Levi 分解の定理によりセクション $\mathbb{G}_m \to$

G_λ が存在しますが、これを経由した $\mathbb{G}_m$ の作用により M を固有空間 $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M[m]$ ($M[m]$ には χ^m で作用) と分解したとき、

$$W_N M := \bigoplus_{m\geq -\frac{N}{2}} M[m]$$

と filtration を定義すると、この filtration はセクションによらず、ℓ-進 mixed Tate module の公理を満たします。(特に U_λ の Lie 環は G_λ-module なので weight filtration が入り、従って U_λ にも weight filtration が入ります。)

この観察により ℓ-進 mixed Tate module とは、条件 (i)-(iv) を満たすようなある短完全列 (1) の、G_λ-module に他なりません。このような G_λ たちが projective system をなすことは容易にわかりますので、次の定理を得ます。

Definition 4.1. $G_{F,S}$ の $\chi : G_{F,S} \to \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ に関する weighted completion $\mathcal{A}_{F,S}$ を、pro-代数群

$$\mathcal{A}_{F,S} := \varprojlim_{\lambda} G_\lambda$$

で定義する。ここに G_λ は、短完全列 (1) であって条件 (i)-(iv) を満たすような代数群の projective system。projective system の構造射は、$f : G_\lambda \to G_\mu$ であって、$f\circ\rho_\lambda = \rho_\mu$ および $p_\mu \circ f = p_\lambda$ を満たすもの。

Theorem 4.2. $G_{F,S} \to \mathcal{A}_{F,S}(\mathbb{Q}_\ell)$ は

$$\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S}) \cong \{\mathcal{A}_{F,S} - \mathit{module}\}$$

なるカテゴリー同値を引き起こす。言い変えると、$\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の淡中圏でその淡中基本群は $\mathcal{A}_{F,S}$。

5. $\mathcal{A}_{F,S}$ の構造

その定義から、短完全列

$$1 \to \mathcal{K}_{F,S} \to \mathcal{A}_{F,S} \xrightarrow{p_{F,S}} \mathbb{G}_m \to 1 \tag{2}$$

と、像が Zariski-dense な連続群準同型

$$\rho_{F,S} : G_{F,S} \to \mathcal{A}_{F,S}(\mathbb{Q}_\ell)$$

が与えられ、$p_{F,S}\circ\rho_{F,S} = \chi$ を満たします。各 U_λ に正規部分群による weight filtration $W_m U_\lambda$ が canonical に入っていたので、$\mathcal{K}_{F,S}$ も weight filtration を持ちます。

$\mathcal{K}_{F,S}$ の Lie 環を $\mathfrak{k}_{F,S}$ で表すと $\mathcal{K}_{F,S}$ は pro-unipotent 群、$\mathfrak{k}_{F,S}$ は pro-nilpotent Lie 環で、やはり weight filtration を持ちます。

(標数 0 の体上では) pro-unipotent 群のカテゴリーと pro-nilpotent Lie 環のカテゴリーは同値で、互いに他を exponential と log で復元で

きますから、$\mathfrak{k}_{F,S}$ とそこへの $\mathbb{G}_m$ の作用を記述すれば $\mathcal{A}_{F,S}$ は決定できたと言えます。

次の定理は、$\mathfrak{k}_{F,S}$ の構造を群コホモロジーによって決定します。

Theorem 5.1.

(i)

$$\mathfrak{k}_{F,S}{}^{ab} \cong \prod_{m\geq 1} H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m).$$

(ii)

$$H^2(\mathfrak{k}_{F,S}) \hookrightarrow \bigoplus_{m\geq 2} H^2_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m)) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-m).$$

$\mathfrak{k}_{F,S}$ は有限次元 nilpotent Lie 環の projective limit なので、各有限次元商に離散位相を入れた位相が入ります。$\mathfrak{k}_{F,S}{}^{ab}$ は $\mathfrak{k}_{F,S}$ の pro-nilpotent Lie 環としての abel 化（つまり各有限次元商の abel 化の projective limit）で、これは $\mathcal{K}_{F,S}$ の pro-unipotent 群としての abel 化と canonical に同型です。$H^2(\mathfrak{k}_{F,S})$ は Lie 環の連続 cohomology です。これは通常の Lie 環の cohomology を定義する際において、上記の位相に関して連続な cochain に制限して求まる cohomology です。$H^i_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ は群の連続 cohomology です ([9] 参照)。

定理の (i) の証明の概略は次の通りです。まず、定義から $\mathcal{K}_{F,S}{}^{ab}$ は短完全列 (1) にあらわれその下の条件 (i)-(iv) を満たす U_λ のうち、abel なもののみを走った

$$\varprojlim_{\lambda : U_\lambda \text{ is abelian}} U_\lambda$$

に他なりません。Levi 分解により $G_\lambda \cong U_\lambda \rtimes \mathbb{G}_m$ となり、projective limit は

$$\rho_\lambda : G_{F,S} \to (U_\lambda \rtimes \mathbb{G}_m)(\mathbb{Q}_\ell)$$

が Zariski dense なもの全体を走ります。この時、ρ_λ に対して $G_{F,S} \to U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ を $\sigma \in G_{F,S} \mapsto \rho_\lambda(\sigma)\chi(\sigma)^{-1}$ で定義してやると容易に 1-cocycle になることがわかります。この対応により、

$$\{\rho_\lambda : G_{F,S} \to (U_\lambda \rtimes \mathbb{G}_m)(\mathbb{Q}_\ell)\}/[U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell) \text{ の共役作用}] \cong H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, U(\mathbb{Q}_\ell))$$

なる 1 対 1 対応が得られます。いつ ρ_λ が Zariski dense になるかですが、$U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ を $\mathbb{Q}_\ell(m)$ 同型部分に分解して

$$U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{m\geq 1} U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)[m]$$

と分解した時、表現論から各コンポーネント $\rho_\lambda[m] : G_{F,S} \to U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)[m] \rtimes \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ が Zariski dense な像を持つときかつそのときに限り ρ_λ は Zariski dense になります。

各コンポーネントでの Zariski dense 性を調べるには、$U := U_\lambda$ が $\mathbb{Q}_\ell(m)$ 同型成分しか持たないと仮定して良く、$G_{F,S}$ の作用が trivial な V により $U = V \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)$ となっているとして構いません。このとき $\rho := \rho_\lambda$(の U 共役類) を与えることと

$$H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, U) = H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m)) \otimes V = \mathrm{Hom}(H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))^*, V)$$

を与えることは同じです。ρ(の像) が Zariski dense になる必要十分条件は、対応する $\mathrm{Hom}(H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))^*, V)$ の元が全射になることであることが証明できます。これにより、$V = H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))^*$ の時の

$$U = H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)$$

が universal であることになり、これらを張り合わせて定理の (i) を得ます。

定理の (ii) は、Lie 環の extension があるごとに対応する群の extension があることを具体的な構成により示して写像をつくります。前者が非自明な extension なら後者もそうであることを示して単射性をいいます。

次の結果は、Soulé[8] によるものです (少し formulation が違います。K 群の計算は Borel によります)。

Theorem 5.2.

$$K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^1_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m)) \cong \mathbb{Q}_\ell{}^{d_m} \quad (m \geq 1),$$
$$H^2_{\mathrm{cts}}(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m)) = 0 \quad (m \geq 2).$$

ここに

$$d_m = \begin{cases} r_1 + r_2 + \#(S) - 1 & m = 1, \\ r_1 + r_2 & m \geq 3 \text{ が奇数}, \\ r_2 & m \geq 2 \text{ が偶数}。\end{cases}$$

pro-nilpotent Lie 環の場合、H^2 が消滅すればそれは自由 pro-nilpotent Lie 環であり、その abel 化の $\mathbb{Q}_\ell$-線形空間としての基底の引き戻しがどのように引き戻しても自由な生成元となることが知られています。これらにより次の定理を得ます。

Theorem 5.3. $\mathrm{Gr}^W_\bullet \mathcal{K}_{F,S} \cong \mathrm{Gr}^W_\bullet \mathfrak{k}_{F,S}$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 *Lie* 環である。その自由な生成元を、各 $\mathrm{Gr}^W_m \mathfrak{k}_{F,S}$ から d_m 個ずつとってくることができる。

短完全列 (2) に spectral sequence を使って次を得ます。

Theorem 5.4.

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})}(\mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell(m)) \cong K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$
$$\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})}(\mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell(m)) = 0.$$

定理 5.3,5.4 は、Deligne が mixed Tate motif のカテゴリーに対して予想したものです [1, Section 8]。

6. 基本群へのガロア作用に関する帰結

Example 3.3で扱ったように $F=\mathbb{Q}$, $S=\{\ell\}$, $X:=\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}/\mathbb{Q}$, $\Pi:=\pi_1^{(\ell)}(\overline{X},\vec{01})$ の時、

$$\rho: G_{\mathbb{Q}} \to \operatorname{Out}\Pi := \operatorname{Aut}\Pi/\operatorname{Inn}\Pi$$

なる表現が得られます。

伊原 [4] はこの表現を研究しました。$G_{\mathbb{Q}}$ に減少 filtration を

$$I^m G_{\mathbb{Q}} := \ker(G_{\mathbb{Q}} \to \operatorname{Aut}(\Pi/L^{m+1}\Pi)$$

で定義します。ここに $L^{m+1}\Pi$ は $m+1$ 階の lower central series です。純群論的な考察により filtration I^m は central filtration となり、graded quotient $\operatorname{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}} := I^m G_{\mathbb{Q}}/I^{m+1}G_{\mathbb{Q}}$ は pro-ℓ abel 群、直和 $\operatorname{Gr}_I^{>0} G_{\mathbb{Q}} := \bigoplus_{m>0}\operatorname{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}}$ は $G_{\mathbb{Q}}$ の交換子から誘導される積によって $\mathbb{Z}_\ell$ 上の Lie 環となります。

Conjecture 1. (Deligne, この formalism への interpretation は伊原 [5])

$\mathbb{Q}_\ell$ 上の Lie 環 $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} := \operatorname{Gr}_I^{>0} G_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ は

(i) $\sigma_{2m+1} \in \operatorname{Gr}_I^{2m+1} G_{\mathbb{Q}}$ $(m=1,2,3,\dots)$ で Lie 環として生成され,

(ii) これらを生成元とする自由 Lie 環である。

$\mathcal{A}_{F,S}$ の構造がわかったことにより、この前半が証明できます。

Theorem 6.1. 上の予想で (i) は正しい。

証明をかいつまんで述べます。Π の Malcev 完備化を $\mathcal{P}$、その Lie 環を $\mathfrak{p}$ としますと、Example 3.3で見たように $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の対象の projective limit になります。このことから、$G_{F,S}$ の $\mathfrak{p}$ への作用は $\mathcal{A}_{F,S}$ を介し、

$$G_{F,S} \to \mathcal{A}_{F,S}(\mathbb{Q}_\ell) \to \operatorname{Out}\mathfrak{p} \cong \operatorname{Out}\mathcal{P} \hookleftarrow \operatorname{Out}\Pi$$

となります。$\mathfrak{p}$ の weight filtration から $G_{F,S}$ に誘導される filtration と I^m とは本質的に一致することが示され、$\overline{\mathcal{K}_{F,S}}$ で $\mathcal{K}_{F,S}$ の $\operatorname{Out}\mathfrak{p}$ における像を表すと

$$\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \cong \operatorname{Gr}_\bullet^W \overline{\mathcal{K}_{F,S}}$$

が証明できます。weight filtration の strictness より、Lie 環の準同型

$$\operatorname{Gr}_\bullet^W \mathcal{K}_{F,S} \to \operatorname{Gr}_\bullet^W \overline{\mathcal{K}_{F,S}}$$

は全射となるので右辺は左辺の自由生成元 (Theorem 5.3参照) $\sigma_1,\sigma_3,\sigma_5,\dots$ の像で生成されます。群論的考察により σ_1 の像は消えることがわかるので、上記の定理が証明されます。

この生成については、graded quotient をとる前、ガロア群の像の中で $\sigma_3,\sigma_5,\dots$ の生成する群が open であることが伊原により証明されています [6]。

Appendix A. マルセフ完備化

群のマルセフ完備化とその連続版についてごく簡単にまとめておきます [7][3]。

Definition A.1. Γ を離散群、k を体とする。k 上の unipotent 代数群 G_λ と像が Zariski Dense な群準同形 $\rho_\lambda : \Gamma \to G_\lambda(k)$ の組すべてを考える $(\lambda \in \Lambda)$。$G_\lambda \to G_\mu$ であって ρ_λ, ρ_μ とコンパチブルなものを射とすると、全射による projective system をなす。このシステムの定める prounipotent 群を Γ の unipotent completion またはマルセフ完備化といい、

$$\Gamma^{\mathrm{unip}}_{/k} := \lim_{\leftarrow, \lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

であらわす。

Definition A.2. 上で、k が位相体、Γ を位相群とする。$\rho_\lambda : \Gamma \to G_\lambda(k)$ で、k と Γ の位相に関して連続なもののみを考えた projective system の定める prounipotent 群を、Γ の連続 unipotent completion または連続マルセフ完備化といい、$\Gamma^{\mathrm{cts,unip}}_{/k}$ であらわす。

本文では、$k = \mathbb{Q}_\ell$ で Γ が profinite 群の場合を考えました。次は、簡単に証明されます。

Theorem A.3. *Γ の作用する有限次元 k 線形空間の全体は淡中圏をなし、その淡中基本群が Γ の unipotent 完備化である。Γ、k に位相が入っている時、連続作用のみを考えてもやはり淡中圏をなし、その淡中基本群が連続 unipotent 完備化である。*

Theorem A.4. *Γ を離散群とし、$\Gamma^{(\ell)}$ をその pro-ℓ 完備化、$\Gamma^{\wedge}$ をその profinite 完備化とする。Γ のアーベル化は有限生成と仮定する。この時、*

$$\Gamma^{\mathrm{unip}}_{/\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong \Gamma^{\mathrm{unip}}_{/\mathbb{Q}_\ell} \cong (\Gamma^{(\ell)})^{\mathrm{cts,unip}}_{/\mathbb{Q}_\ell} \cong (\Gamma^{\wedge})^{\mathrm{cts,unip}}_{/\mathbb{Q}_\ell}.$$

Γ が有限生成自由群の時は $\Gamma^{\mathrm{unip}}_{/\mathbb{Q}}$ は自由 prounipotent 群であり、その Lie 環は自由 pronilpotent Lie 環であることが知られています。上の命題から、Γ の pro-ℓ 完備化の連続 unipotent 完備化も、同様の構造を持つことがわかります。

References

[1] P. Deligne: *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), 79–297, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York-Berlin, 1989.

[2] A. Grothendieck: *Revêtement Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag 1971.

[3] R. Hain, M. Matsumoto: *Weighted Completion of Galois Groups and Some Conjectures of Deligne*, preprint, math.AG/0006158.

[4] Y. Ihara: *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math., 123 (1986), 43–106.

[5] Y. Ihara: *The Galois representation arising from* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ *and Tate twists of even degree*, in *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Publ. MSRI, No.16 (1989), Springer-Verlag, 299–313.

[6] Y. Ihara: *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, RIMS preprint 1229, 1999.

[7] A. Malcev: *Nilpotent torsion-free groups*, (Russian) Izvestiya Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 13, (1949), 201–212.

[8] C. Soulé: *On higher p-adic regulators*, Lecture Notes in Math. 854 (1981), 372–401.

[9] J. Tate: *Relations between* K_2 *and Galois Cohomology*, Invent. Math., 30 (1976), 257–274.

京都大学総合人間学部数理科学教室, 〒 606-8501 京都市左京区吉田二本松町
E-mail address: `matumoto@math.h.kyoto-u.ac.jp`